子どもの数直線の見方の様相を顕在化させるための問題の開発と検討

市　川　　啓
上越教育大学大学院修士課程２年

１．研究の背景

1.1　先行研究に見る「数直線」の価値と、問題点

乗除法や割合の学習指導において、数直線の有効性を指摘した研究は多い。（榎園ら 1983，中村 1996，白井ら 1997 等）

それらの研究の多くは、数直線に埋め込まれた比例構造を生かすことによって、数量と数量の関係である倍や割合を顕在化させることができることを大きなポイントとして挙げている。例えば中村（1995）は、小数の乗法の割合による意味づけの問題点を改善するための具体的な方策の１つとして、比例関係に基づいて割合を数直線によって明示することで、小数の乗法の意味づけを同数累加から割合へと拡げることを提案している。また、白井ら（1997）は、÷小数の学習で、数直線を書きながらも立式の根拠に用いていない児童について、２つの数量の関係が比例関係に基づいているということの理解が十分になされていないと考えられると指摘している。

これらの研究から、数直線をどのように見ているかに着目する必要がある。

1.2　問題の所在

子どもによって、数直線に関する比例や割合の認識が異なることは指摘されている。実際どのように違っているかについては、十分な検討がなされているとは言えない。そこで、そこに焦点をあてた研究が、求められる。

数直線に関する比例や割合の認識を調べるために、比例や割合に関する問題を自由に解かせてみる。子ども自身が回答に数直線をかいたとする。しかし、それが数直線に基づく推論だとは限らない。白井ら（1997）の、数直線をかいても演算決定の根拠にしていない児童がいることの指摘は、数直線をかいたか、かかないかで、それを用いたかどうかの判断ができないことを示している。

つまり、子どもが数直線に関する比例や割合をどのようにもっているのかを明らかにするためには、自由に問題を解かせ、数直線をかかせるだけではうまくいかない。子どもの数直線に関する比例や割合の概念を顕在化させるための問題を工夫することが必要である。

2　本研究の目的

本稿は、子どもの数直線に対する認識の様相の一端を顕在化させるための、問題を開発し、それについて検討することを目的とする。

3　数直線を用いた異種の２量に関する欠損値問題の解決

まず１あたり量が示されていない、比例する異種の２量の欠損値問題の解決過程を、教材研究的な立場から検討する。そして、その過程を、数直線の目盛りを読む問題に置きかえることを試みる。

3.1　問題と一般的な解法

ここでは、具体的に次の問題を数直線を用いて考えてみる。

＜問題＞
5 cm の重さが 40 gの針金があります。
①この針金 20cm の重さは、何gでしょう。
②この針金 13cm の重さは、何gでしょう。

このような比例関係を前提とした欠損値問題は、一般的には次の３つの解法がある。

a）帰一法

① 針金１ cm あたりの重さは、
40 ÷ 5 = 8 g
よって、この針金 20cm の重さは
8 × 2 0 = 160　　　答え　160 g

② この針金 13cm の重さは、
8 × 13 = 104 g　　　答え　104 g

b）倍比例

① 20cm の針金は５ cm の４倍。
長さが４倍になれば、重さも４倍になるはずだから
40 × 4 = 160　　　答え　160 g

② 13cm の針金は、5 cm の 2.8 倍
長さが 2.8 倍になれば、重さも 2.8 倍になるはずだから
40 × 2.8 = 104　　　答え　104 g

c）外比（対応のきまり）

①

長さ	5　×8	…	20　×8	
重さ	40	…	□	

20 × 8 = 160
答え　160 g

②

長さ	5　×8	…	13　×8	
重さ	40	…	□	

13 × 8 = 104
答え　104 g

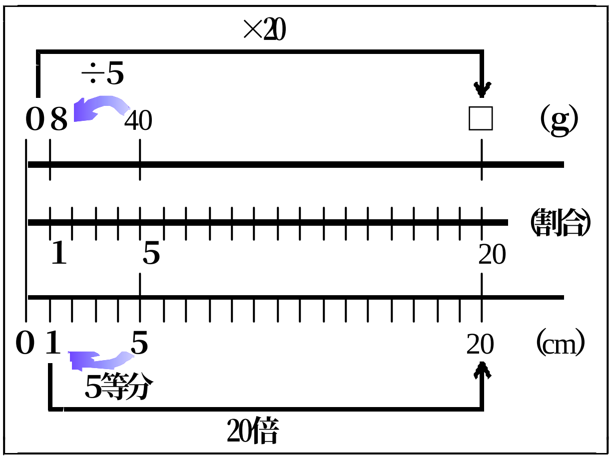
3.2　数直線を用いた帰一法の推論

ここでは、a）b）２種類の解法について、数直線を用いたとき、どのように推論が行われ、倍や割合、比例関係が顕在化するかを検討しよう。

まず、問題①の帰一法による解法を考えてみる。帰一法では、まず１ cm の重さを考えるところから始まる。そこで、５ cm と１ cm の関係を考えると、長さは５等分されている。従って、重さも５等分されるはずである。分数倍や小数倍がよく身に付いている段階の子どもであれば、1/5 倍になっているなどとも言えるであろうが、そこまで至っていない子どもでも、帰一法を用いた解決は見られるので、そのときの根拠として、ここでは「等分」を用いる。長さが５等分されれば、重さも５等分されるはずである（２量の比例関係）から、１ cm の重さは、40 ÷ 5 = 8 から 8 g と求まる。

つぎに、20cm 分の重さを考える。20cm は 1 cm の 20 倍であるから、20cm の重さは、8 × 20 = 160 から、160 g と求めることができる。

この推論プロセスは、図２のように数直線上の操作・および関係として表すことができる。矢印で操作を表し、第３の数直線によって割合関係を表している。



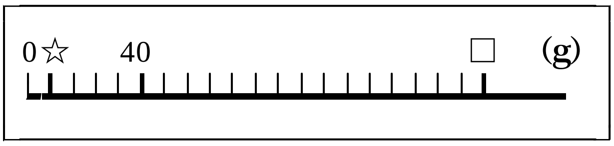
〔図２〕

問題②の場合も、推論プロセスに大きな違いはない。

割合を表す第３の数直線を入れてみると明

らかなように、帰一法では、40 を５と見て推論を行っていると、解釈できる。

この過程は図３の様に、40 を５と見るために、40 を５目盛りで表し、１目盛りの大きさを求める活動、それに基づいて 20 目盛りにあたる大きさを求める活動に置きかえることができる。



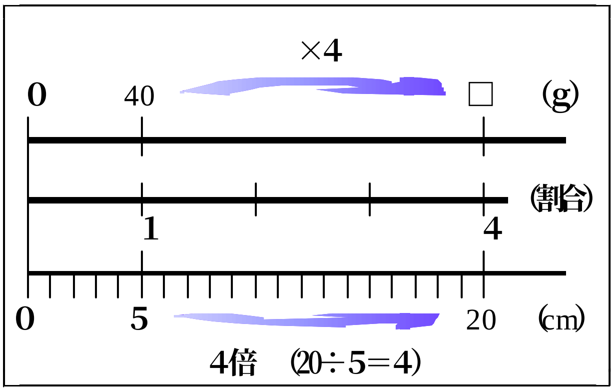
〔図３　５目盛りで 40 のとき１目盛りは？
１目盛り☆のとき、20 目盛りは？〕

3.3　数直線を用いた倍比例の推論

(１)　問題①　整数倍になる場合について

まず、問題①について検討する。長さの関係に着目し、20cm は５ cm の４倍である。長さが４倍になれば、重さも４倍になるはず（２量の比例関係）であるから、20cm の重さは 40g の４倍で、40 ×４＝ 160 から 160g と結論づけられる。言い換えれば、５ cm を１と見れば、20cm は４と見られる。5cm に対応する 40g を１と見た時、４にあたる重さは 40 ×４となり、160 g と結論づけられる。

この推論プロセスは、図４のように数直線上の操作・および関係として表すことができる。矢印で操作を表し、第３の数直線によって割合関係を表している。



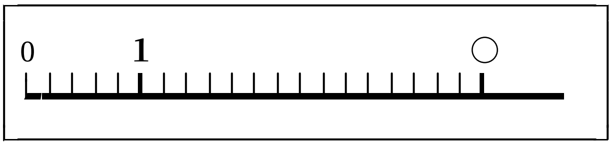
〔図4〕

4.2 で示した帰一法と 4.3 で示した倍比例の方略では、「何を１と見るか」ということに関して、大きな違いがある。帰一法は、どちらかの数量の１普遍単位、この問題で言えば１ cm を１と見る解法であるといえる。また、倍比例では、基準量を１と見る解法であるといえる。

帰一法の場合、割合を表す第３の数直線は、長さの数直線と、全く同じ目盛りをふればよかった。この目盛りに対応させて、重さの数直線に目盛りをふり直せばよかった。

しかし倍比例の場合、まず、割合の数直線に長さの基準量を１目盛りとした目盛りをふる。さらに割合の数直線の目盛りに合わせて、重さの数直線に目盛りをふり直す必要がある。割合の数直線を作り出すときに、新たな目盛りの系列を考えなければならず、それに基づいて、重さの数直線に新たな目盛りを入れていかなければならない。

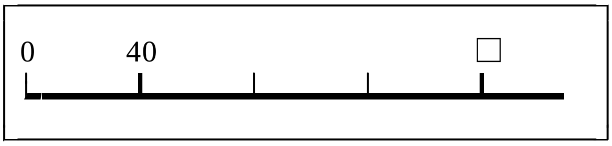
つまり、前半の手続きは、５目盛りを１としたとき、４０目盛りがいくつになるかを考える活動に置きかえることができる。



〔図５　５目盛りで１のとき 40 目盛りは？〕

ただし、問題①では、○の値が整数になることを改めて付加しておく。

後半の手続きは、40 を１目盛りとしたとき、○に当たる数の４である４目盛りに対応する数を求める活動に置きかえることができる。数直線で表せば図６のようになる。



〔図６　１目盛り 40 のとき４目盛りでは？〕

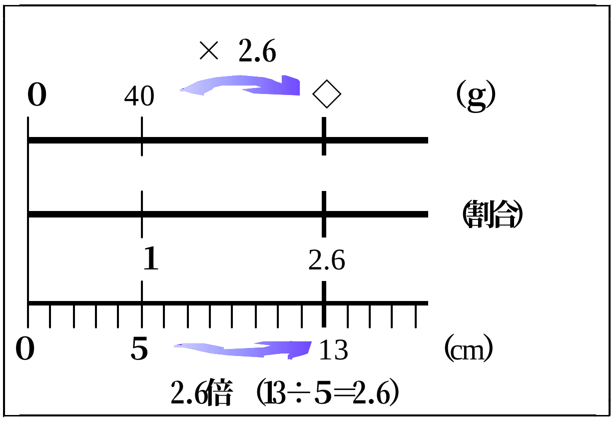
(２)　問題②　小数（分数）倍になる場合について

次に問題②について検討する。問題①と同様長さの関係に着目する。５を１と見たとき、

13 がいくつにあたるかを考える。

13cm は５ cm の 2.6 倍にあたる。長さが 2.6 倍になれば、重さも 2.6 倍になるはず（２量の比例関係）であるから、13cm の重さは 40g の 2.6 倍で、40 × 2.6 ＝ 104 から 104g と結論づけられる。言い換えれば、５ cm を１と見れば、13cm は 2.6 と見られる。5cm に対応する 40g を１と見た時、2.6 にあたる重さは 40 × 2.6 となり、104 ｇと結論づけられる。

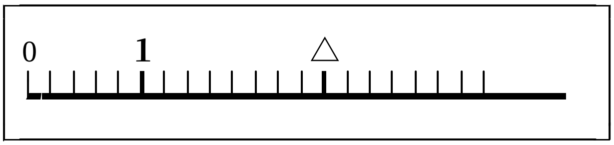
この推論プロセスは、図７のように数直線上の操作・および関係として表すことができる。矢印で操作を表し、第３の数直線によって割合関係を表している。



〔図7〕

基本的な解決のプロセスは問題①と同様である。長さの基準量を１目盛りとして、それに対応するように割合の数直線に目盛りをふる。

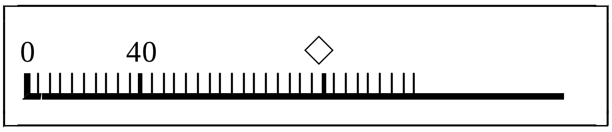
問題②では、このプロセスを５目盛りを１としたとき、13 目盛りがいくつになるかを考える活動に置きかえることができる。



〔図８　５目盛りで１のとき 13 目盛りは？〕

問題②が①と異なるのは、△の値が小数または分数になることである。

次に、重さの数直線の目盛りをふり直す。40 を１目盛りにして目盛りをふり直すことになるが、問題②で知りたいのは△目盛りに当たる大きさである。しかし、△は具体的には 2.6 である。問題①のように１目盛りを１にすると、2.6 を目盛りは、１目盛りを 10 等分して新たな下位の目盛りを設定しなければならない。そこで、0.1 を１目盛りで表し、2.6 を 26 目盛りで表すことにする。そうすると、10 目盛りで 40 のとき、26 目盛りに当たる大きさはいくつかという活動に、置きかえることができる。これを表したのが図９である。



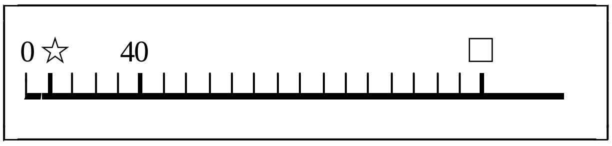
〔図９　10 目盛り 40 のとき 26 目盛りでは？〕

4.4　単一数直線の目盛りをよむ活動への置きかえ

3.1 から 3.3 では、１あたり量が示されていない比例する異種の２量の欠損値問題を考える際に、教材研究的な立場から想定される推論を、数直線の目盛りを読む活動に置きかえることを試みた。

まず、それらを整理し特徴をまとめる。

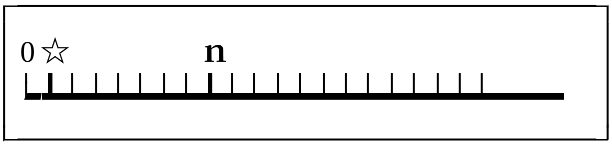
＜帰一法＞



〔図３　５目盛りで 40 のとき１目盛りは？
１目盛り☆のとき、20 目盛りは？〕

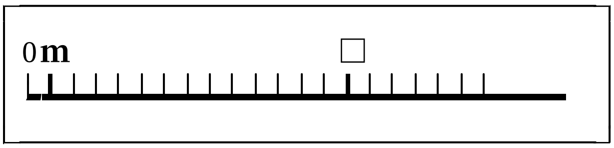
帰一法は、次の２つの活動に置きかえられた。まず１目盛りにあたる大きさを求める活動、それをもとに、ｎ目盛りにあたる大きさを求める活動である。

＜帰一法問題（１）＞

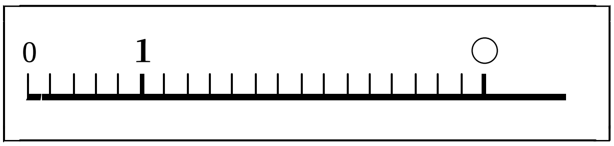


ａ（任意）目盛りにあたる大きさがｎのと

き、１目盛りに当たる大きさ☆を求める問題。
＜帰一法問題（２）＞

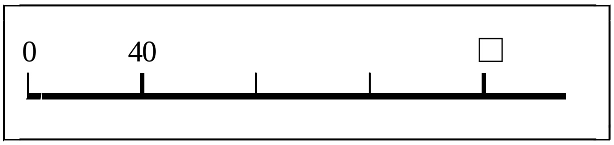


１目盛りに当たる大きさがmのとき、b（任意）目盛りにあたる大きさ□を求める問題。
＜倍比例（整数倍）問題（１）＞



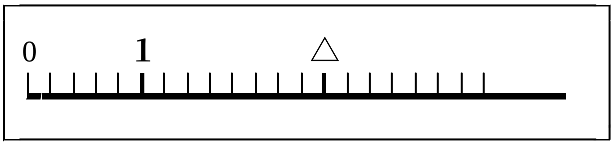
〔図５　５目盛りで１のとき 40 目盛りは？〕

ａ目盛りが１のときｂ目盛りにあたる大きさを求める。（ただし、ｂがａで整除できる）
＜倍比例（整数倍）問題（２）＞



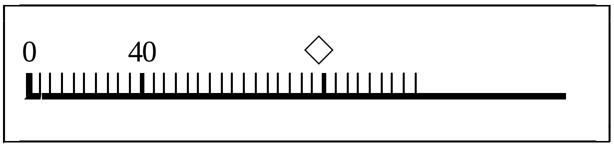
〔図６　１目盛り 40 のとき４目盛りでは？〕

１目盛りがｎのときａ目盛りに当たる大きさを求める。
＜倍比例（小数倍・分数倍）問題（１）＞



〔図８　５目盛りで１のとき 13 目盛りは？〕

ａ目盛りが１のときｂ目盛りにあたる大きさを求める。（ただし、ｂがａで整除できない。）
＜倍比例（小数倍・分数倍）問題（２）＞



〔図９　10 目盛り 40 のとき 26 目盛りでは？〕

10 目盛りがｎのときｂ目盛りにあたる大きさを求める。

４．数直線の目盛りを読む問題に対する子どもの反応

Ｓ県内公立小学校６年生１学級に対して、数直線の目盛りを読む問題等に関する質問紙調査を実施した。ここでは、そのデータの中から、3.4 でまとめたタイプの問題を抜きだし、子どもの実際の反応を検討する。

4.1　調査時期と対象

時期：〔第１回調査〕2004 年５月 18 日
〔第２回調査〕2004 年６月 29 日
対象：公立小学校６年生１学級 28 名
ただし、第１回調査は、１名欠席のため、27 名で実施。

4.2　問題の系列

〔第１回調査〕

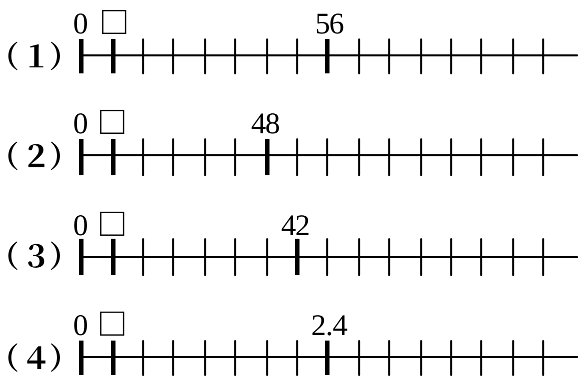
問題は４題。本稿で検討の対象とするのは、その中の１題（小問、２問による構成）である。

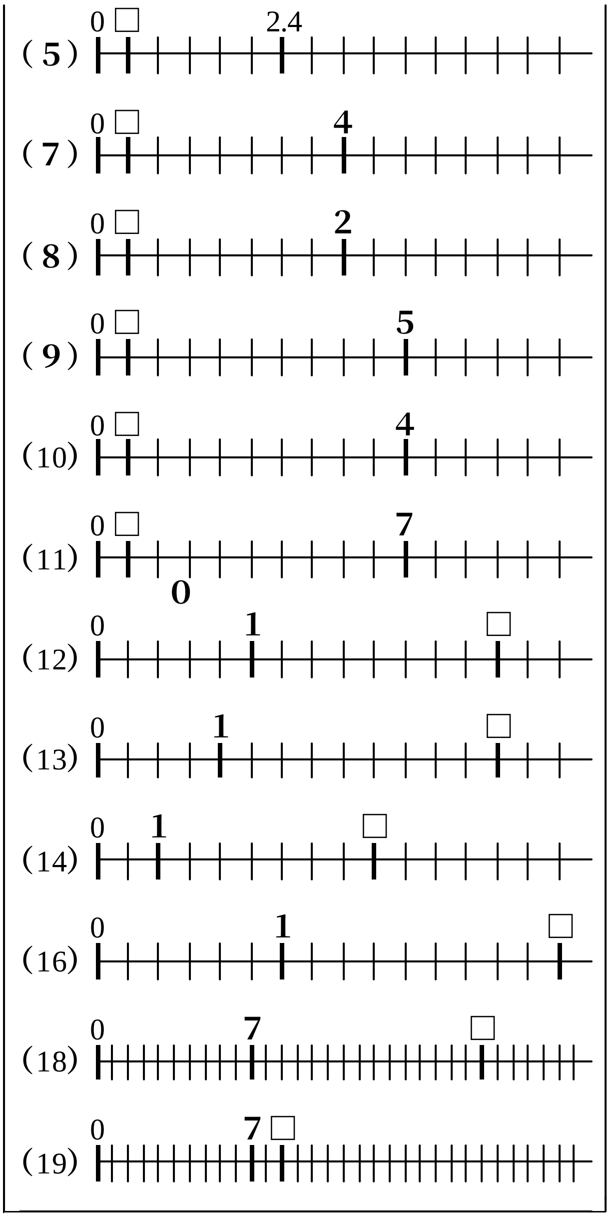
> 4　５ cm で 40 ｇのはりがねがあります。
> ①このはりがね、20cm の重さは何ｇでしょう？
> ②このはりがね、13cm の重さは何ｇでしょう。

〔第２回調査〕

問題数は全部で 22 問。本稿で検討の対象とするのは、3.4 でまとめたタイプの 16 題。

□に入る数を求めましょう。





4.3　各問題の意図と正答率

問題の意図		問題番号	正答率(%)
比例する異種の2量で、1あたり量の明示なしの欠損値問題	整数倍	$\boxed{4}$ ①	70
	小数倍（分数倍）	②	33
帰一法問題（1）a（任意）目盛りにあたる大きさがnのとき、1目盛りに当たる大きさを求めるタイプの問題	8目盛りが56	(1)	82
	6目盛りが48	(2)	79
	7目盛りが42	(3)	86
	8目盛りが2.4	(4)	75
	6目盛りが2.4	(5)	75
	8目盛りが4	(7)	71
	8目盛りが2	(8)	50
	10目盛りが5	(9)	68
	10目盛りが4	(10)	64
	10目盛りが7	(11)	64
倍比例（小数倍）問題(1) a（任意）目盛りにあたる大きさが1のとき、b目盛り（bがaで整除できない）に当たる大きさを求めるタイプの問題	5目盛りが1のときの13目盛り	(12)	54
	4目盛りが1のときの13目盛り	(13)	39
	2目盛りが1のときの9目盛り	(14)	68
	6目盛りが1のときの15目盛り	(16)	36
倍比例（小数倍）問題（2）10目盛りにあたる大きさがnのとき、a目盛りにあたる大きさを求めるタイプの問題	10目盛りにあたる大きさが7のとき、25目盛り	(18)	32
	10目盛りにあたる大きさが7のとき、12目盛り	(19)	32

※正答率は、小数第1位を四捨五入

5　子どもの反応の分析

5.1　問題$\boxed{4}$①②の正誤の関係

		問題①　整数倍 正答	問題①　整数倍 誤答	計
問題②	正答	9名 33%	0名 0%	9名 33%
	誤答	10名 37%	8名 30%	18名 67%
計		19名 70%	8名 30%	27名 100%

※ただし、誤答の数には無答を含む。

①に正答した１９名の内の９名が②にも正答した。①で誤答又は無答で②に正答した児童はいなかった。

5.2　数直線問題のタイプ別全問正答者

問題のタイプ	全問正答者数 全問正答者率
帰一法問題（１）タイプ 問題番号（１）～（11）	１１名 ３９％
倍比例(小数倍)問題(１)タイプ 問題番号（12）～（14）（16）	７名 ２５％
倍比例(小数倍)問題(２)タイプ 問題番号（18）～（19）	７名 ２５％

帰一法問題（１）タイプの全問正答者数が一番多い。倍比例（小数倍）問題は、２タイプともに、帰一法問題（１）の全正答者数よりも少ない。

5.3　倍比例（小数倍）問題（１）と、他の問題との関連

数直線の欠損値問題で、ａ（任意）目盛りにあたる大きさが１のとき、ｂ目盛り（ｂがａで整除できない）にあたる大きさを求めるタイプの問題、（12）～（14）と（16）の計４題の反応に着目し、$\boxed{4}$や、他のタイプの数直線問題との関連を分析する。

ア）帰一法問題（１）タイプとの関連

倍比例（小数倍）問題（１）タイプ全問正答者７名中６名が、帰一法問題（１）タイプに全問正答している。また、全問正答できなかった１名は、問題番号（２）だけ誤答であったが、残りは全問正答している。得られたデータからは、倍比例（小数倍）問題（１）タイプができる児童は、帰一法問題（１）タイプができると言える。

逆に、帰一法問題（１）タイプに全問正答している児童１１名に着目すると、６名は倍比例（小数倍）問題（１）タイプに全問正答しているものの、残りの５名に関しては、４問中、３問正答が３名、１問正答が１名、１問も正答できなかった児童が１名いた。つまり、1目盛りにあたる大きさが求められても、すぐにｎ目盛りにあたる大きさを求めることができるとは限らないことを示唆しており、この問題を通して、そのような子どもが顕在化した。

イ）倍比例（小数倍）問題（２）タイプとの関連

倍比例（小数倍）問題（１）タイプの全問正答者７名中５名が、倍比例（小数倍）問題（２）タイプに全問正答している。残りの２名のうち１名は、倍比例（小数倍）問題（２）タイプの２問中、１問に正解しているが、１名は、１問もできていなかった。

逆に、倍比例（小数倍）問題（２）タイプに全問正答している児童７名中、５名は倍比例（小数倍）問題（１）タイプで全問正答しているが、残りの２名のうち１名は４問中３問に正答したものの、後の１名は１問しか正答していなかった。

つまり、どちらかのタイプが全部できたとしても、もう一方のタイプができるとは限らない過渡的状況の子どもが見出された。

ウ）問題$\boxed{4}$①②との関連

倍比例（小数倍）問題（１）タイプの全問正答者７名中６名は、問題$\boxed{4}$①②を共に正答している。残りの１名は、①のみ正答している。

逆に、問題$\boxed{4}$①②共に共に正答した児童９名中６名は、倍比例（小数倍）問題（１）タイプの問題に全問正答した。残り３名のうち、１名は４問中３問、１名は４問中１問正答し、後の１名は１問も正答していなかった。つまり、文章で提示された問題は解けるが、数直線を用いては解釈できない可能性のある児童が顕在化した。

5.4　問題$\boxed{4}$①②の方略と、倍比例（小数倍）問題（１）（２）タイプの正誤パターンとの関連

ここでは、問題$\boxed{4}$①②を共にに正答した９名の児童を対象にして、そのときの方略と倍比例（小数倍）問題（１）（２）の正誤パターンとの関連について検討する。

児童	倍比例（１）タイプ				（２）タイプ		整数倍	小数倍
	12	13	14	16	18	19	$\boxed{4}$①	$\boxed{4}$②
A	○	○	○	○	○	○	倍比例	倍比例
B	○	○	○	○	○	○	倍比例	倍比例
C	○	○	○	○	○	○	倍比例	帰一法
D	○	○	○	○	○	○	倍比例	帰一法
E	○	○	○	○	○	○	倍比例	帰一法
F	○	○	○	×	×	○	外　比	帰一法
G	○	○	○	○	×	×	倍比例	倍比例
H	×	×	○	×	×	×	倍比例	帰一法
I	×	×	×	×	×	×	倍比例	判断不能

倍比例（小数倍）問題（１）タイプ、（２）タイプ共に全問正答で、数直線の目盛りがよく読めると想定される児童も、C、D、Eの様に整数倍の場合$\boxed{4}$①では、倍比例の方略を使いながらも、小数倍の問題$\boxed{4}$②では、帰一法を採っている。一方で、倍比例（小数倍）問題（２）タイプが全くできていなくとも、$\boxed{4}$②で倍比例の方略を用いるGの様な児童も存在する。

自由に問題を解決した$\boxed{4}$の様な問題では顕在化しない数直線に関する比例や割合についての認識の違いが、倍比例問題（１）（２）によって顕在化した。

6　研究のまとめ

本稿の目的は、子どもの数直線に対する認識の様相の一端を顕在化させるための、問題を開発し、それについて検討することであった。

まず教材研究的な立場から、比例する異種の２量で、１あたり量が示されていない欠損値問題の解決過程を、単一の数直線の欠損値問題に置きかえ、６パターンの問題を提案した。それらの中から、２つのパターンの問題に関して、６年生を 28 名を対象にした質問紙調査の反応を分析した。その結果、提案した著査問題を行うことによって、$\boxed{4}$の様に自由な問題解決では見ることができない、数直線に関する割合や比例の概念が顕在化させることができた。

倍比例問題（１）はできるが、（２）はできない、逆に（２）はできるが（１）はできないなどの児童が見いだされた。また、同じパターンの問題としてカテゴライズした問題間にも、個人毎にできるできないの差が見出された。それらについて考察するには、個人の行為に着目した研究を待たねばならないことが明らかになった。

＜引用・参考文献＞

加藤康順．(1980)．割合の指導についての一考察：２本の数直線を組み合わせた図の利用．日本数学教育学会誌,*62*(10),pp.25-30.

榎園高士．(1983)．関数の考えを用いた乗法の指導：数直線を使った指導を通して．日本数学教育学会誌,*65*(6),pp.34-38.

中村享史．(1996)．小数の乗法の割合による意味づけ．日本数学教育学会誌,*78*(10),7-13.

白井一之．(1997)．乗法・除法の演算決定に有効にはたらく数直線の指導．日本数学教育学会誌,*79*(6),pp.51-56.

田端輝彦・市川啓．(2001)．小数倍の意味指導の改善　－数直線に目盛りを書く活動を通して－．学芸大学数学教育研究，*13*, pp65-74.